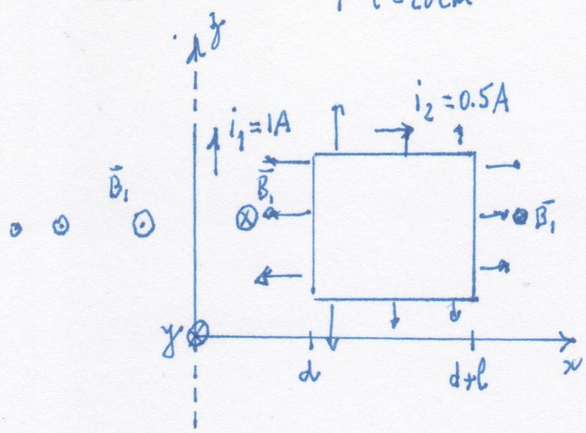
$\boxed{134}$

$d = 20\,cm$
$l = 20\,cm$



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}\vec{u}_y$$

a) F

b) ϕ

c) M

$$d\vec{F}_2 = i_2\left[d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1\right]$$

Força de Laplace exercida em cada troço do circuito (2).

- No lado $x = d$ a força exercida sobre o circuito (2) é dada por:

$$\vec{F}_d = i_2\int\left[d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1\right] = -i_2\, l B_2\, \vec{u}_x$$

para $x = c^{te}$, B_1 é const.

$$\vec{F}_d = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\, l\, \vec{u}_x$$

- No lado $x = l + d$, tem-se $d\vec{F}_2 = i_2\, ds_2\, B_1 \vec{u}_x$

$$\vec{F}_{d+l} = +\, i_2\, l B_1 \vec{u}_x = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi(d+l)}\, l\, \vec{u}_x$$

- No lado superior: $d\vec{F}_{2s} = i_2\, ds_2\, B_1 \vec{u}_3$

$$\vec{F}_{2s} = i_2\int_d^{d+l}\frac{dx\, \mu_0 i_1}{2\pi x}\vec{u}_3 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\int_d^{d+l}\frac{dx}{x}\vec{u}_3 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)\vec{u}_3$$

- No lado inferior: $d\vec{F}_{2i} = -i_2\, ds_2\, B_1 \vec{u}_3$

$$\vec{F}_{2i} = -i_2\int_d^{d+l} dx\,\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}\vec{u}_3 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)\vec{u}_3$$

$\left.\right\}$ Os dois lados, superior e inferior, anulam-se

- Força total sobre o circuito (2) $\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = \vec{F}_d + \vec{F}_{d+l} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right)\vec{u}_x$

$$\vec{F}_T = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 l^2}{2\pi d(d+l)}\vec{u}_x = -\frac{4\pi 10^{-7} \times 1 \times 0.5 \times 4\times 10^{-2}}{2\pi\,(2 \times 4\times 10^{-2})}\vec{u}_x = -5\times 10^{-8}\,\vec{u}_x\ (N)$$

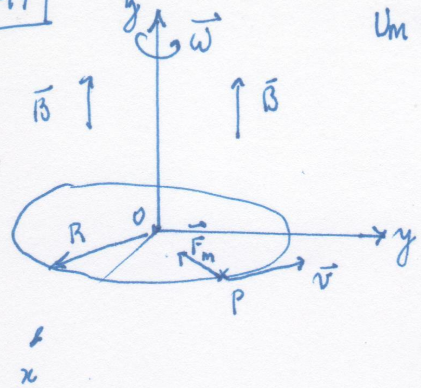
b) $\vec{m} = \vec{u}_y \qquad \phi_2 = \iint_{S_2}(\vec{B}_1 \cdot \vec{u}_y)\, dS = \iint_{S_2}|\vec{B}_1|\, ds = \iint_{S_2}\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}\, dx\, dz$

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\int_d^{d+l}\frac{dx}{x}\int_{z_0}^{z_0+l} dz = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\, l \ln\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

$$\phi_2 = \frac{4\pi 10^{-7} \times 1 \times 0.2}{2\pi}\ln 2 = 4 \times \ln 2 \times 10^{-8}\ Wb$$

c) $\phi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 = \underbrace{\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)}_{L_{21} = 4\times\ln 2\times 10^{-8}\,H} i_1 + (\quad)\, i_2$ não se calcula aqui

$\boxed{147}$

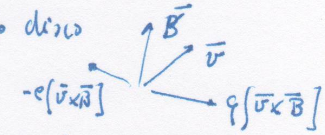


Um dado electrão de carga $q=-e$ sobre o disco condutor

estará sujeito à força de Lorentz

$$\vec F_m = q\left[\vec v \times \vec B\right]$$

orientada para o centro do disco



donde resultará uma acumulação de cargas (−) na região central O e uma depleção de cargas na periferia, resultando daqui um campo electrostático $\vec E_t$ tal que as forças exercidas sobre o electrão se equilibram $\quad \vec E^m + \vec E_t^e = 0 \;\Rightarrow\; q v B = q E_t^e \;\Rightarrow\; V(O)-V(P) = \int_0^P (\vec E_t^e \cdot d\vec r)$

$$V(O)-V(P) = -\int_0^P E_t^e\, dr = -\int_0^R vB\, dr = -\int_0^R \omega r B\, dr$$

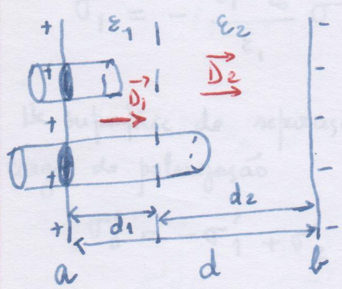
$$= -\omega B \int_0^R r\, dr = -\frac{\omega B R^2}{2}$$ (o potencial é mais elevado em P).

9ª AULA PRÁTICA

87 Os dois dieléctricos são LHI e não estão electrizados em volume ($\rho = 0$)

$\Rightarrow \rho' = 0$ (não existem cargas eléctricas de polarização em volume)

CONDENSADOR A



Supõe-se a armadura da esquerda positiva e

$\sigma = \dfrac{q}{S}$ é a densidade uniforme existente

Na armadura da direita existe uma densidade simétrica $-\sigma < 0$.

~ Apliquemos o Teorema de Gauss

$$\oint (\vec{D} \cdot \vec{n})\, dS = \sum q_{int}$$

Consideremos os dois cilindros e as suas cargas verdadeiras

$$D_1\, dS = \sigma\, dS \qquad D_2\, dS = \sigma\, dS$$

$$\Rightarrow \quad D_1 = D_2 = \sigma$$

O vector deslocamento eléctrico tem a mesma intensidade nos dois meios

~ Por outro lado, o campo electrostático $\vec{E}$ é diferente nos dois meios

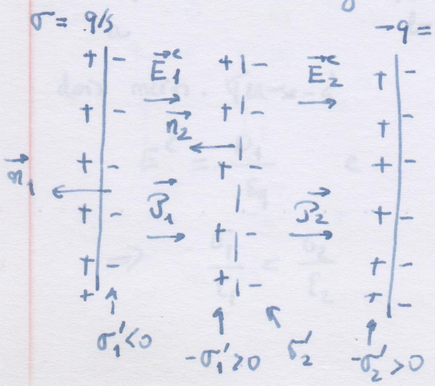
$$E_1^e = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \quad \text{e} \quad E_2^e = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

~ A diferença de potencial entre as armaduras é

$$V_a - V_b = \int_a^b (\vec{E}^e \cdot d\vec{p}) = \int_0^{d_1} E_1^e\, dx + \int_{d_1}^{d_1 + d_2} E_2^e\, dx$$

$$V_a - V_b = E_1^e d_1 + E_2^e d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{q}{\varepsilon_1 S} d_1 + \frac{q}{\varepsilon_2 S} d_2$$

~ Densidades de carga de polarização



$\sigma' = (\vec{P} \cdot \vec{n})$ com $\vec{n}$ dirigido para fora do dieléctrico;

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}^e$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

$$\varepsilon_0 \chi_e = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$\sigma_1' = (\vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e_1 \cdot \vec{n}_1) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,|\vec{E}^e_1|$$

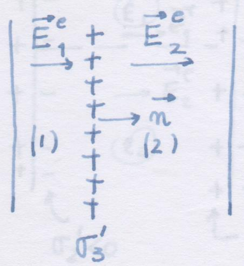
$$\sigma_2' = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e_2 \cdot \vec{n}_2) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,|\vec{E}^e_2|$$

$\vec{n}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_1$ $\qquad$ $\vec{n}_2 \uparrow\downarrow \vec{P}_2$

$$\sigma_1' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma \qquad \sigma_2' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma$$

Na superfície de separação dos dois dieléctricos existe a densidade de carga de polarização

$$\sigma_3' = -\sigma_1' + \sigma_2' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\varepsilon_0 \sigma$$



— Nota — Pode-se obter este resultado usando a relação de descontinuidade

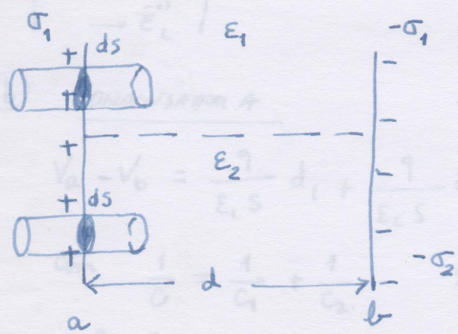
$$E^e_{2n} - E^e_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0}$$

na superfície de separação dos dois dieléctricos

$$E^e_2 - E^e_1 = \frac{\sigma_3'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_3' = \varepsilon_0 (E^e_{2n} - E^e_{1n}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_1}\right) = \varepsilon_0 \sigma \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$$

CONDENSADOR B



Repare que a ddp entre as armaduras é uma constante, pois cada uma delas é um condutor em equilíbrio electrostático e, atendendo a que se verifica,

$$V_a - V_b = E^e d,$$

o campo electrostático é o mesmo nos dois meios. Ter-se-á

$$E^e = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \quad e \quad E^e = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sigma_1$$

A carga total na armadura da esquerda é

$$q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \sigma_1 S_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sigma_1\right) S_2 = \sigma_1\left(S_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} S_2\right)$$

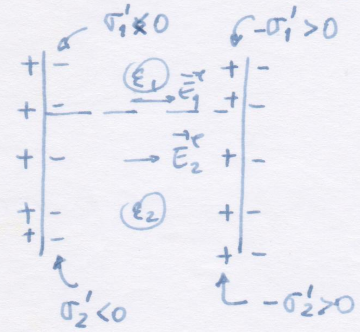
donde se obtém

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 q}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} \Rightarrow q_1 = \sigma_1 S_1 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} q$$

e

$$q_2 = \sigma_2 S_2 = \frac{\varepsilon_2 S_2}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} q$$

verificando-se $q_1 + q_2 = q$.

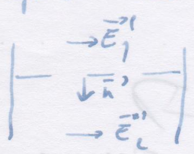


As densidades de carga de polarização são

$$\sigma_1' = (\vec{P}_1' \cdot \vec{n}_1) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e \cdot \vec{n}_1) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E^e = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1$$

$$\sigma_2' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma_2$$

Na superfície de separação dos dois dieléctricos tem-se $\sigma_3' = 0$ pois o campo $\vec{E}^e$ não tem componente normal

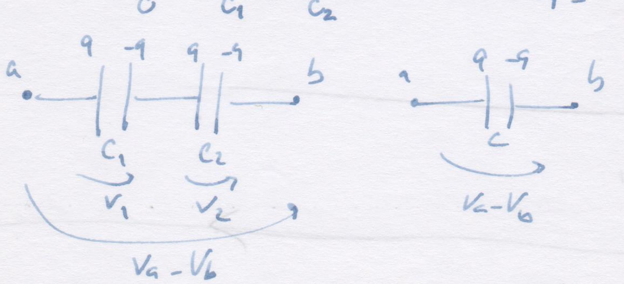


$$E_{2n}^e - E_{1n}^e = \frac{\sigma_3'}{\varepsilon_0} = 0$$

(b) CONDENSADOR A

$$V_a - V_b = \frac{q}{\varepsilon_1 S} d_1 + \frac{q}{\varepsilon_2 S} d_2 = \frac{q}{C}$$

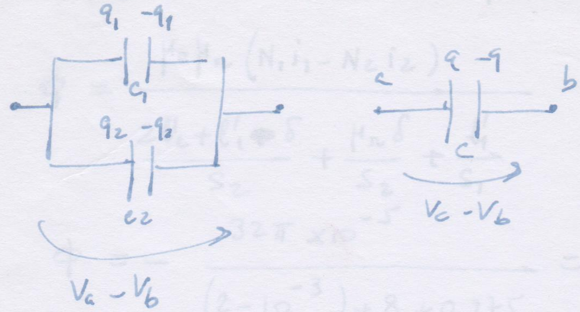
Com $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ Sendo $C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}$ $C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$



$V_a - V_b = V_1 + V_2$

Associação em série

CONDENSADOR B



$$q = q_1 + q_2$$

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = D_1 S_1 + D_2 S_2 = \varepsilon_1 E^e S_1 + \varepsilon_2 E^e S_2$$

$$= \varepsilon_1 \frac{V_a - V_b}{d} S_1 + \varepsilon_2 \frac{V_a - V_b}{d} S_2 = C\,(V_a - V_b)$$

$$C = C_1 + C_2 \qquad \text{sendo} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S_2}{d}$$

Associação em paralelo

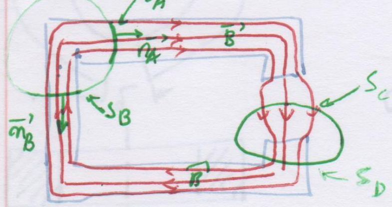
$\boxed{163}$ Admite-se que o circuito magnético constitui um "tubo de linhas de força" perfeito.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \implies \oint\!\!\oint (\vec{B}\cdot\vec{n})\,dS = 0$$

$$\iint_{S_A} (\vec{B}\cdot\vec{n}_A)\,dS + \iint_{S_B} (\vec{B}\cdot\vec{n}_B)\,dS = 0$$

$$\vec{n} = \vec{n}_A = -\vec{n}_B$$

$$\iint_{S_A} (\vec{B}\cdot\vec{n})\,dS - \iint_{S_B} (\vec{B}\cdot\vec{n})\,dS = 0 \implies \Phi_A = \Phi_B$$



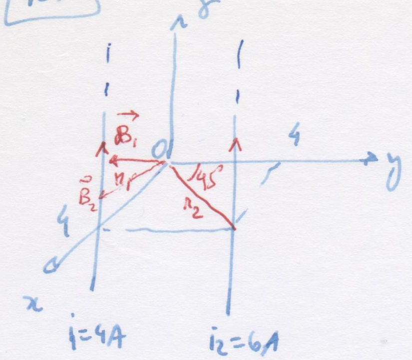
Do mesmo modo

$$\Phi_C = \Phi_D$$

Repare que o fluxo ~~de quaisquer~~ de qualquer secção recta do circuito é uma constante, logo o campo de indução magnética será diferente sempre que a secção variar

$$\phi = \iint (\vec{B}\cdot\vec{n})\,dS = C^{te}$$

129



$$d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_1 i_2}{r^2}\left[d\vec{s}_2 \times \left(d\vec{s}_1 \times \vec{grad}_2\, r\right)\right]$$

$$\cancel{= i_1\, d\vec{s}_2 \times d\vec{B}}$$

$$r_2 = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{2}\,4$$

$$r_1 = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_1}{r_1}\vec{u_y} + \frac{i_2}{r_2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u_x} - \vec{u_y}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left[-\frac{4}{4}\vec{u_y} + \frac{6}{\sqrt{2}\,4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u_x} - \vec{u_y}\right)\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\vec{u_x}\,\frac{3}{4} + \vec{u_y}\left(-1-\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$$

$$\left(d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i_1}{r^2}\left[d\vec{s}_1 \times \vec{grad}_2\, r\right]\right)$$ Lei de Biot-Savart

Fio filiforme infinito: $\vec{B}' = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u_\varphi}$

$$\vec{B}(0) = \left(1.5\times10^{-5}\,\vec{u_x} - 3.5\times10^{-5}\,\vec{u_y}\right)\,N$$

b) $$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\,v\,\vec{u_y}\times\vec{u_x}\;1.5\times10^{-5}\,T$$

$$d\vec{F}_2 = i_2\left[d\vec{s}_2 \times d\vec{B}_2\right]$$

$$= -q\,v\left(1.5\times10^{-5}\,T\right)\vec{u_z}\;(N)$$

$$= -\left(10\times10^{-9}\,C\right)\left(10^3\,m\,s^{-1}\right)\vec{u_z}\left(1.5\times10^{-5}\,T\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -1.5\times10^{-10}\,\vec{u_z}\;(N)}$$

$\boxed{7^{a}\ \text{AULA PRÁTICA}}$

$\boxed{132}$ $\vec{B}(r) = K r \, \vec{u}_\varphi$

$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right]\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi)\vec{u}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r K r)\vec{u}_z = 2K\vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{j} = \frac{2K}{\mu_0}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{i = \frac{2K\pi R^2}{\mu_0}}$$

$\boxed{134}$ Como já vimos no lado direito da [illegible]

Sofá (– meia abacate
– Banana
– Cacau

Tudo junto

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\mu_r\mu_0 S_2}\left(2l_2' + l_1' - \delta\right) + \frac{\phi}{\mu_0 S_2}\delta + \frac{\phi}{\mu_r\mu_0 S_1} l_1' = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$\phi = \frac{\mu_0\mu_r\left(N_1 i_1 - N_2 i_2\right)}{\frac{2l_2' + l_1' - \delta}{S_2} + \frac{\mu_r \delta}{S_2} + \frac{l_1'}{S_1}}$$

$S_1 = 20\ cm^2$

$S_2 = 10\ cm^2$

$$\phi = -\frac{32\pi \times 10^{-5}}{\left(2-10^{-3}\right) + 8 + 0.275} = -9.785\times 10^{-5}\ Wb$$

$\Rightarrow$

$\overline{B}_1 = -4.893\times 10^{-2}\ T$ $\qquad$ $\overline{B}_2 = -9.785\times 10^{-2}\ T$

$\overline{H}_1 = -4.867\ A\,m^{-1}$ $\qquad$ $\overline{H}_{2Fe} = -9.733\ A\cdot m^{-1}$

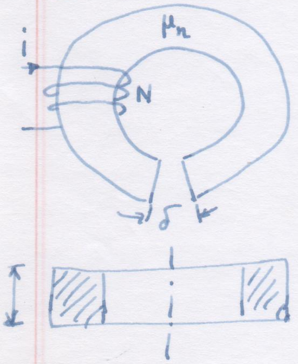
$\overline{H}_{2ar} = -7.787\times 10^{4}\ A\,m^{-1}$

(c) Fluxo através do enrolamento (1) é

$$\phi_1 = N_1\phi = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\Rightarrow L_{12} = -\frac{\mu_0\mu_r N_1 N_2}{\frac{2l_2' + l_1' - \delta}{S_2} + \frac{\mu_r\delta}{S_2} + \frac{l_1'}{S_1}} = -2.935\times 10^{-2}\ H$$

$\boxed{164}$



(a) Coeficiente de auto-indução (sem entreferro)

$$\Phi^{(1)} = \left(R_2 - R_1\right) h\,\overline{B} = \int_0^h\int_{R_1}^{R_2} B(r)\,dr\,dz$$

O cálculo de $B(r)$ fazemos com o T. Ampère

$$H(r)\,2\pi r = Ni \Rightarrow H(r) = \frac{Ni}{2\pi r}$$

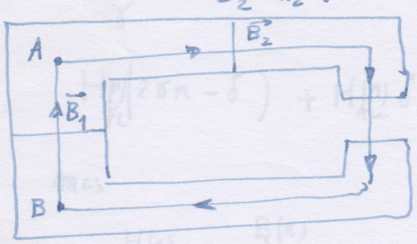
$$B(r) = \mu H(r) = \mu\frac{Ni}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \phi = N\phi^{(1)} = \frac{N^2\mu i}{2\pi}\int_0^h\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}\,dz = \frac{N^2\mu i}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Desprezando a variação do campo $\vec{B}$ segundo a direcção transversal do circuito, admitindo que o valor de $\vec{B}$ nos diferentes pontos é igual ao valor que ele toma sobre a linha de força média,

$$\bar{B}_1 = \frac{\phi}{S_1} \qquad \bar{B}_2 = \frac{\phi}{S_2}$$

$$S_2 = d_2 h$$



$S_1 = d_1 h$

No troço da secção S_1:

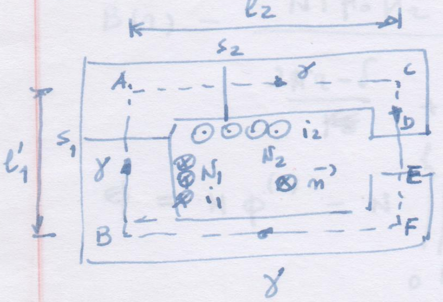
$$\bar{H}_1 = \frac{\bar{B}_1}{\mu_r \mu_0} = \frac{\phi}{\mu_r \mu_0 S_1}$$

No troço da secção S_2:

$$\bar{H}_{2Fe} = \frac{\bar{B}_2}{\mu_r \mu_0} = \frac{\phi}{\mu_r \mu_0 S_2}$$

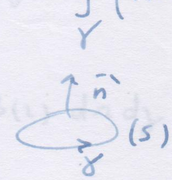
$$\bar{H}_{2ar} = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\phi}{\mu_0 S_2}$$

(b)



$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_\gamma (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \sum_{(S)} i$$



$$H_{2Fe}\overline{AC} + H_{2Fe}\overline{CD} + H_{2ar}\overline{DE} + H_{2Fe}\overline{EF} + H_{2Fe}\overline{FB} + H_{1Fe}\overline{AB} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$H_{2Fe}(\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{FB}) + H_{2ar}\overline{DE} + H_{1Fe}\overline{AB} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$H_{2Fe}(2l'_2 + l'_1 - \delta) + H_{1Fe} l'_1 + H_{2ar}\delta = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$l'_1 = l_1 - d_2 = 55\,\text{cm}$$

$$l'_2 = l_2 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} = 72.5\,\text{cm}$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

(b) Com entreferro

$$\oint_\gamma (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = N i$$

$$H_{Fe}(r)(2\pi r - \delta) + H_{ar}(r)\,\delta = N i$$

mas

$$H_{1,Fe}(r) = \frac{B_1(r)}{\mu_r \mu_0} \qquad H_{2,ar}(r) = \frac{B_2(r)}{\mu_0}$$

Conservação do fluxo $\phi_A = \phi_B \Rightarrow B_1 = B_2$

$$\frac{B(r)}{\mu_r \mu_0}(2\pi r - \delta) + \frac{B(r)}{\mu_0}\delta = N i$$

$$B(r) = \frac{N i \mu_0 \mu_r}{\frac{2\pi r - \delta}{\cancel{\mu_r}} + \mu_r \delta} =$$

$$\phi = N \phi^{(1)} = N \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} B(r)\, dr\, dz = \mu_0 \mu_r N^2 i h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r - \delta + \mu_r \delta}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h i}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r - \frac{\delta}{2\pi} + \frac{\mu_r}{2\pi}\delta} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h i}{2\pi} \ln\left(\frac{2\pi R_2 + \delta(\mu_r - 1)}{2\pi R_1 + \delta(\mu_r - 1)}\right)$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{2\pi R_2 + \delta(\mu_r - 1)}{2\pi R_1 + \delta(\mu_r - 1)}\right)}$$

— Se usarmos o valor médio então

$$\overline{B} = \frac{\mu N i}{2\pi r_0} \qquad \text{onde } r_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$\cancel{\phi = N \phi^{(1)}} = N \overline{B} \iint ds =$$